Vorlesung 9b

Markovketten II

Teil 2:

Gleichgewichtsverteilungen

(Buch S. 108-109)

Sei P eine Übergangsmatrix auf S

und ρ eine (Start-)Verteilung auf S.

Dann gilt (vgl. Teil 1):

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a, X_1 = b) = \rho(a)P(a,b), \quad \text{also}$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a) = \rho(a),$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_1 = b) = \sum_{a \in S} \rho(a)P(a,b).$$

Für welche Startverteilung ρ ist X_1 so verteilt wie X_0?

Eine Verteilung π auf S heißt

Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix P, wenn

eine der folgenden (äquivalenten!) Bedingungen erfüllt ist:

(G1) $$\sum_{a \in S} \pi(a) P(a,b) = \pi(b)\ , \quad b \in S\ .$$

(G2) $$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

d.h. unter $\mathbf{P}_\pi$ haben X_0 und X_1 dieselbe Verteilung.

Reversible Gleichgewichtsverteilungen

Hinreichend für

(G2)

$$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

ist die Bedingung

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a)\ , \quad a, b \in S$$

Denn dann ist unter $\mathbf{P}_\pi$

das Paar (X_0, X_1) so verteilt wie (X_1, X_0),

also insbesondere X_0 so verteilt wie X_1.

Gleichbedeutend mit

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a)\ , \quad a, b \in S$$

ist

$$\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a)\ , \quad a, b \in S\ .$$

π heißt dann *reversible Gleichgewichtsverteilung* zu P.

Ein Beispiel einer

nicht reversiblen Gleichgewichtsverteilung:

Zyklische Irrfahrt auf $S = \{a, b, c\}$, mit

$$P(a, b) = P(b, c) = P(c, a) := p,$$

$$P(b, a) = P(c, b) = P(a, c) := 1 - p\,.$$

Die uniforme Verteilung auf S

ist Gleichgewichtsverteilung zu P.

Nur für $p = 1/2$ ist sie reversibel.

Die Gleichgewichtsverteilung der einfachen Irrfahrt auf dem gewöhnlichen Würfel $S = \{0, 1\}^3$:

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn. (Zwei Elemente von S heißen *benachbart*, wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden.) Für benachbarte Knoten a und b ist hier $P(a, b) = 1/3$.

Die uniforme Verteilung auf S ist reversible Gleichgewichtsverteilung.

Eine wichtige Beispielklasse:

Die einfache Irrfahrt

auf einem ungerichteten, zusammenhängenden Graphen

mit endlicher Knotenmenge S

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn:

$$P(a,b) = \frac{1}{g(a)},$$

mit b Nachbar von a, $g(a) :=$ # Nachbarn von a .

Ansatz: $\pi(a) := \frac{1}{c} g(a)$

Diese Verteilung π erfüllt die die Reversibilitätsbedingung (R),

denn für benachbarte Knoten a, b gilt:

$$\frac{1}{c} g(a) \frac{1}{g(a)} = \frac{1}{c} g(b) \frac{1}{g(b)}$$

Man kann zeigen (hier ohne Beweis): Es gibt (unter den gegebenen Voraussetzungen) nur **eine** Gleichgewichtsverteilung.

Fazit: Die Gewichte der Knoten

unter der Gleichgewichtsverteilung

sind proportional zur Anzahl der Nachbarn der Knoten.